Programação dinâmica

CLRS cap 15

= “recursão–com–tabela”
= transformação inteligente de recursão em iteração

Números de Fibonacci

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Números de Fibonacci

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Algoritmo recursivo para F_n:

```
FIBO-REC (n)
se n ≤ 1
    então devolva n
    senão a ← FIBO-REC (n − 1)
          b ← FIBO-REC (n − 2)
          devolva a + b
```

Consumo de tempo

```
FIBO-REC (n)
se n ≤ 1
    então devolva n
    senão a ← FIBO-REC (n − 1)
          b ← FIBO-REC (n − 2)
          devolva a + b
```

Tempo em segundos:

n	16	32	40	41	42	43	44	45	47
tempo	0.002	0.06	2.91	4.71	7.62	12.37	19.94	32.37	84.50

$F_{47} = 2971215073$

Consumo de tempo

```
FIBO-REC (n)
1  se n ≤ 1
2      então devolva n
3      senão a ← FIBO-REC (n − 1)
4            b ← FIBO-REC (n − 2)
5            devolva a+b
```

$T(n)$:= número de somas feitas por FIBO-REC (n)

linha	número de somas
1-2	$= 0$
3	$= T(n-1)$
4	$= T(n-2)$
5	$= 1$
$T(n)$	$= T(n-1) + T(n-2) + 1$

Recorrência

$$\begin{aligned} T(0) &= 0 \\ T(1) &= 0 \\ T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

A que classe Ω pertence $T(n)$?
A que classe O pertence $T(n)$?

Recorrência

$$T(0) = 0$$
$$T(1) = 0$$
$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

A que classe Ω pertence $T(n)$?
A que classe O pertence $T(n)$?

Solução: $T(n) > (3/2)^n$ para $n \geq 6$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_n	0	0	1	2	4	7	12	20	33	54
$(3/2)^n$	1	1.5	2.25	3.38	5.06	7.59	11.39	17.09	25.63	38.44

Recorrência

Prova: $T(6) = 12 > 11.40 > (3/2)^6$ e $T(7) = 20 > 18 > (3/2)^7$.
Se $n \geq 8$, então

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + 1 \\
&\stackrel{\text{hi}}{>} (3/2)^{n-1} + (3/2)^{n-2} + 1 \\
&= (3/2 + 1)\,(3/2)^{n-2} + 1 \\
&> (5/2)\,(3/2)^{n-2} \\
&> (9/4)\,(3/2)^{n-2} \\
&= (3/2)^2 (3/2)^{n-2} \\
&= (3/2)^n\,.
\end{aligned}
$$

Logo, $T(n)$ é $\Omega((3/2)^n)$.

Verifique que $T(n)$ é $\mathrm{O}(2^n)$.

$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \Rightarrow T(n) > 1.6^n/3, \forall n \geq 2$

- **Caso base** $n = 2$**:** $T(2) = 1 > 1.6^2/3$
- **Caso base** $n = 3$**:** $T(3) = 2 > 1.6^3/3$
- **H.I.:** Fixe $n \geq 4$ e suponha $T(k) > 1.6^k/3, \ \forall\ 2 \leq k < n$
- **P.I.:** Vamos provar que $T(n) > 1.6^n/3$.
- $T(n) \ = \ T(n-1) + T(n-2) + 1 \ > \ 1.6^{n-1}/3 + 1.6^{n-2}/3 \ =$
- $= \ 2.6 \cdot (1.6)^{n-2}/3 \ < \ 2.56 \cdot (1.6)^{n-2}/3 \ = \ 1.6^n/3$

$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \implies T(n) < 2^n, \forall\ n \geq 0$

- **Caso base:** $T(0) = 0 < 1 = 2^0; \quad T(1) = 0 < 2 < 2^1$
- **H.I.:** Fixe $n \geq 2$ e suponha $T(k) < 2^k, \ \forall\ 0 \leq k < n$
- **P.I.:** Vamos provar que $T(n) < 2^n$.
- $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 < 2^{n-1} + 2^{n-2} + 1 =$
  $3 \cdot 2^{n-2} + 1 = 4 \cdot 2^{n-2} - 1 \cdot 2^{n-2} + 1 < 2^n$
- $\square$

Proporção Áurea: $x = (1+\sqrt{5})/2 = 1.618 \implies x^2 = x + 1.$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \Rightarrow T(n) > (1.618)^n/3, \forall n \geq 2$$

- **Base:** $T(2) = 1 > 1.618^2/3$. $T(3) = 2 > 1.6^3/3$.
- **H.I.:** Fixe $n \geq 4$ e suponha $T(k) > 1.618^k/3, \ \forall\ 2 \leq k < n$
- **P.I.:** Vamos provar que $T(n) > 1.618^n/3$.
- $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 > 1.618^{n-1}/3 + 1.618^{n-2}/3 = 2.618 \cdot (1.618)^{n-2}/3 = 1.618^2 \cdot (1.618)^{n-2}/3 = 1.618^n/3$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \Rightarrow T(n) \leq 1.618^n - 1, \forall n \geq 0$$

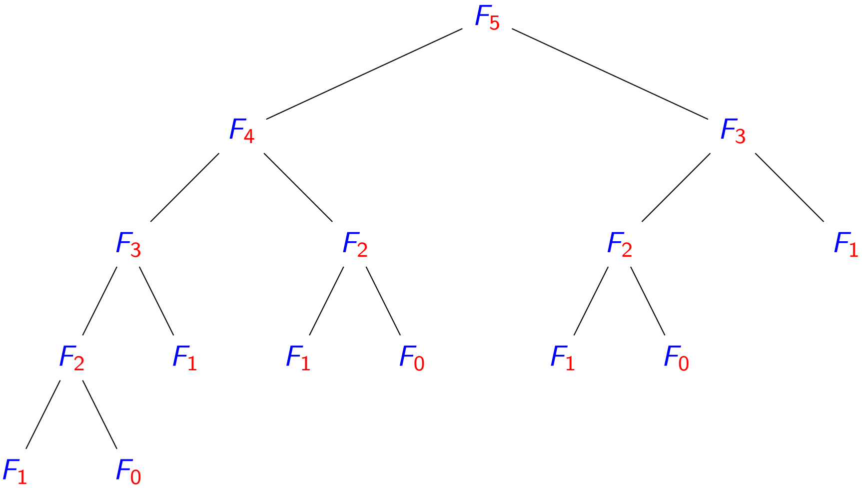
- **Base:** $T(0) = 0 \leq 1.618^0 - 1$; $\quad T(1) = 0 \leq 1.618^1 - 1$
- **H.I.:** Fixe $n \geq 2$ e suponha $T(k) \leq 1.618^k - 1, \ \forall\ 0 \leq k < n$
- **P.I.:** Vamos provar que $T(n) \leq 1.618^n - 1$.
- $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \leq 1.618^{n-1} - 1 + 1.618^{n-2} - 1 + 1 = 2.618 \cdot (1.618)^{n-2} - 1 = (1.618)^2 \cdot (1.618)^{n-2} - 1 = 1.618^n - 1$

Conclusão: $T(n) = \Theta(1.618^n) = \Theta(Fibonacci(n))$

Consumo de tempo

Consumo de tempo é exponencial.

Algoritmo resolve subproblemas muitas vezes.



Resolve subproblemas muitas vezes

```
FIBO-REC(5)
  FIBO-REC(4)
    FIBO-REC(3)
      FIBO-REC(2)
        FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(0)
      FIBO-REC(1)
    FIBO-REC(2)
      FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(0)
  FIBO-REC(3)
    FIBO-REC(2)
      FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(0)
    FIBO-REC(1)
```

FIBO-REC(5) = 5

Resolve subproblemas muitas vezes

```
FIBO-REC(8)
  FIBO-REC(7)
    FIBO-REC(6)
      FIBO-REC(5)
        FIBO-REC(4)
          FIBO-REC(3)
            FIBO-REC(2)
              FIBO-REC(1)
              FIBO-REC(0)
            FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(3)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
          FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(4)
        FIBO-REC(3)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
            FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
    FIBO-REC(5)
      FIBO-REC(4)
        FIBO-REC(3)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
          FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
      FIBO-REC(3)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(1)
  FIBO-REC(6)
    FIBO-REC(5)
      FIBO-REC(4)
        FIBO-REC(3)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
          FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
      FIBO-REC(3)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(1)
    FIBO-REC(4)
      FIBO-REC(3)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(2)
        FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(0)
```

Programação dinâmica

"Dynamic programming is a fancy name for divide-and-conquer with a table. Instead of solving subproblems recursively, solve them sequentially and store their solutions in a table. The trick is to solve them in the right order so that whenever the solution to a subproblem is needed, it is already available in the table. Dynamic programming is particularly useful on problems for which divide-and-conquer appears to yield an exponential number of subproblems, but there are really only a small number of subproblems repeated exponentially often. In this case, it makes sense to compute each solution the first time and store it away in a table for later use, instead of recomputing it recursively every time it is needed."

I. Parberry, *Problems on Algorithms*, Prentice Hall, 1995.

Versão recursiva com memoização

```
MEMOIZED-FIBO (f, n)
    para i ← 0 até n faça
        f[i] ← −1
    devolva LOOKUP-FIBO (f, n)
```

```
LOOKUP-FIBO (f, n)
    se f[n] ≥ 0
        então devolva f[n]
    se n ≤ 1
        então f[n] ← n
        senão f[n] ← LOOKUP-FIBO(f, n − 1)
                      + LOOKUP-FIBO(f, n − 2)
    devolva f[n]
```

Não recalcula valores de f.

Algoritmo de programação dinâmica

Sem recursão:

```
FIBO (n)
    f[0] ← 0
    f[1] ← 1
    para i ← 2 até n faça
        f[i] ← f[i − 1] + f[i − 2]
    devolva f[n]
```

Note a tabela $f[0\,..\,n{-}1]$.

f					$\star$	$\star$	??			

Consumo de tempo (e de espaço) é $\Theta(n)$.

Algoritmo de programação dinâmica

Versão com economia de espaço.

```
FIBO (n)
  se n = 0 então devolva 0
  f_ant ← 0
  f_atual ← 1
  para i ← 2 até n faça
      f_prox ← f_atual + f_ant
      f_ant ← f_atual
      f_atual ← f_prox
  devolva f_atual
```

Algoritmo de programação dinâmica

Versão com economia de espaço.

```
FIBO (n)
se n = 0 então devolva 0
f_ant ← 0
f_atual ← 1
para i ← 2 até n faça
    f_prox ← f_atual + f_ant
    f_ant ← f_atual
    f_atual ← f_prox
devolva f_atual
```

Consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Consumo de espaço é $\Theta(1)$.